2021-2022

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА

Математика

15 задач 10 класс, 15 задач 11 класс

За каждый правильный ответ в задании – 1 балл
Максимальный балл – 15
Попытка – 1
Время на прохождение теста – 240 мин

10 класс

1. Замок Кощея Бессмертного имел квадратную форму. Однажды Кощей решил расширить свои владения и добавил к замку квадратную пристройку. В результате периметр замка увеличился на 10%. На сколько процентов увеличилась площадь замка?
2. Известно, что $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$. Какие значения может принимать выражение $$a(a^2 - b^2) + b(b^2 - c^2) + c(c^2 - a^2)\ ?$$
3. Николай не поленился вычислить сумму $9 + 99 + 999 + \cdots + 9 \ldots 9$, причем в последнем числе содержится 2020 девяток, и выписать ее на доску. Сколько раз в итоговом результате записана цифра 1?
4. Сколько существует четырехзначных чисел, не делящихся на 1000, у которых первая и последняя цифры четны?
5. В классе не менее 95,5% и не более 96,5% учеников учатся без двоек. При каком наименьшем числе учеников это возможно?
6. Внутри квадрата ABCD отмечены точки K и M (точка M находится внутри треугольника ABD, точка K — внутри BMC) так, что треугольники BAM и DKM равны (AM = KM, BM = MD, AB = KD). Найдите ∠KCM, если ∠AMB = 100^0
7. Решите уравнение $[x^3] + [x^2] + [x] = \{x\} - 1$, где [x]- целая часть числа x, $\{x\}$ - дробная часть числа x.
8. Решите уравнение $2\sqrt{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 - 9} = \frac{10}{x-4}$.
9. Какое наибольшее количество клеток таблицы 8×8 можно покрасить так, чтобы никакие три центра окрашенных клеток не лежали на одной прямой?
10. Вычислить сумму дробей $\frac{1}{x+xy+1} + \frac{1}{y+yz+1} + \frac{1}{z+zx+1}$, если произведение переменных $xyz = 1$.
11. В начале первого года в банк был внесен вклад величиной в 10 тысяч рублей, процентная ставка составила 11% в год, доход по вкладу начисляется в конце каждого года и прибавляется к вкладу. На сколько рублей возрастет величина вклада за второй год хранения, если годовая процентная ставка за этот период не менялась?
12. В трапеции ABCD с основаниями AB и CD диагонали пересекаются в точке E. Площадь треугольника ABE равна 72, площадь треугольника CDE равна 50. Найдите площадь трапеции ABCD.
13. При каких значениях a квадратные трехчлены $x^2 + ax + 1$ и $x^2 + x + a$ имеют общий корень?
14. Про углы треугольника *ABC* известно, что $sinA + cosB = \sqrt{2}$ и $cosA + sinB = \sqrt{2}$. Найдите величину угла *C*. Ответ запишите в градусах.
15. За круглым столом сидят 30 человек – рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них за этим же столом есть ровно один друг, причём у рыцаря этот друг – лжец, а у лжеца этот друг – рыцарь (дружба всегда

взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили "Да". Сколько из остальных могли также ответить «Да»?

11 класс

1. Сколько решений имеет уравнение $\left[{}^{x}/_{10}\right] = \left[{}^{x}/_{11}\right] + 1$, где $[x]$- целая часть числа x?
2. Какое наибольшее число клеток доски 6×6 можно покрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не соприкасались (даже в одной точке)?
3. Имеется 9 пустых больших коробок. В некоторые из них положили по 10 пустых средних коробок, а в некоторые средние - по 10 пустых маленьких. Всего оказалось 109 коробок. Сколько среди них было пустых коробок ?
4. Вычислите сумму $\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$.
5. Сколько цифр содержит число $8^4 \cdot 5^{16}$?
6. Пролетая на драконе, Гарри Поттер увидел крысу Рона, бегущую в противоположную сторону. Пролетев еще полминуты не меняя направления, Гарри спрыгнул с дракона и отправился в погоню. Известно, что скорость Гарри в 5 раз меньше скорости дракона. Во сколько раз скорость Гарри больше скорости крысы, если он догнал крысу через 4,5 минуты после их встречи?
7. Функция f такова, что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$. Найдите $f(2020)$, если $f(\frac{1}{2020}) = 1$.
8. Функция $f(x)$ определена для всех x, кроме 1, и удовлетворяет равенству: $(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x + f(x)$. Найдите $f(-1)$.
9. Функция $f(x)$ определена на положительной полуоси и принимает только положительные значения. Известно, что $f(1) + f(2) = 10$ и $f(a+b) = f(a) + f(b) + 2\sqrt{f(a)f(b)}$ при любых a и b. Найдите, на какую наибольшую степень числа 2 делится число $f(2^{2020})$.
10. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если образующая конуса в два раза больше его высоты. Ответ дайте в градусах.
11. Какое максимальное число плоскостей симметрии может иметь тетраэдр?
12. Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу, равна 9.6. Из вершины C прямого угла восставлен к плоскости треугольника ABC перпендикуляр CM, причем $CM = 28$. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы AB.
13. Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?
14. На плоскости xOy прямые $y = 3x - 3$ и $x = -1$ пересекаются в точке B, а прямая, проходящая через точку $M(1; 2)$, пересекает заданные прямые соответственно в точках A и C. При каком положительном значении абсциссы точки A площадь треугольника ABC будет наименьшей?
15. Укажите наименьшее целое значение параметра a , при котором система уравнений будет иметь единственное решение

$$\begin{cases} \dfrac{y}{a - \sqrt{x} - 1} = 4, \\ y = \dfrac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 1}. \end{cases}$$