

**Многопрофильная олимпиада «Путь к успеху»
(Математика) 2021/22 учебный год
Задания заключительного тура**

10 класс

1. На что нужно умножить треть от четверти числа, чтобы получить утроенную половину того же числа?
2. В стопке было не более 39 книг. Четверть книг в стопке были учебники по математике. Если убрать пять верхних книг, то седьмая часть оставшихся будут учебниками по математике. Сколько книг находилось в стопке?
3. Найдите $\sin \alpha + \cos \alpha$, если $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{3}$.

4. Найдите сумму:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}}$$

5. Найдите все последовательности $f: N \rightarrow N$, для которых $f(1) = 1$ и для любых натуральных x и y верно $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$.
6. Решите уравнение $|\sin x + \cos x| = 5 - 4[x]$, где $[x]$ означает целую часть числа x .
7. Решите уравнение: $(5x - 2y - z)^2 + 4|3x - 2y + 5| = 3x - 2y - \sqrt{z - 1} + 5$.
8. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B , в отношении $13:12$, считая от точки B . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если $BC = 20$.
9. В прямоугольной трапеции $ABCD$ биссектриса острого угла при основании AD пересекает боковую сторону AB в точке M . Найдите угол CMD , если $CD = AD + BC$.
10. Пусть $\triangle ABC$ – равносторонний. Точка M лежит внутри угла, образованного лучами AB и AC , но вне данного треугольника. Пусть h_1, h_2, h_3 – расстояния от точки M до прямых AB, BC, AC соответственно. Докажите, что $h_1 + h_2 - h_3$ не зависит от положения точки M .

11 класс

1. Задумали три числа. Первое ко второму относится как 14:9, а третье составляет 20% от первого. Найти первое число, если известно, что оно на 11 больше суммы остальных двух.
2. Чтобы пронумеровать книгу, понадобилось 489 цифр. Сколько страниц в книге?
3. Вычислите: $\frac{(0,4)^{-2} \cdot (2,5)^{-4}}{(0,16)^{-5} \cdot ((6,25)^{-3})^2}$.
4. Дедушка с внуком пошли вместе кататься на лыжах. Бабушка знает, что по ровному месту оба едут со скоростью 7 км/ч; под гору – дедушка - 8 км/ч, внук – 20 км/ч; в гору – дедушка – 6 км/ч, внук – 4 км/ч. Оба проехали по одному и тому же маршруту. Может ли бабушка определить, что больше – протяженность спусков или подъёмов на их пути, если первым вернулся а) внук; б) дед?
5. Решите уравнение $x^{0,5 \lg x} = 0,01x^2$.
6. Найти значение $f(2)$, если для любого $x \neq 0$ выполняется равенство:
$$f(x) - 2x = \frac{5}{x} - 4f\left(\frac{1}{x}\right).$$
7. Найдите все натуральные n , при которых справедливо неравенство:
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \leq 0,999.$$
8. Найдите вероятность того, что числа, удовлетворяющие неравенству $|x| + |y| \geq 4$, удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leq 16$.
9. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности единичного правильного тетраэдра между серединами его противоположных рёбер.
10. Можно ли составить пирамиду из четырёх равных тупоугольных треугольников? Ответ обоснуйте.