МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Многопрофильная олимпиада школьников «Путь к успеху»

МАТЕМАТИКА

Титульный лист работы

Шифр________

Фамилия	**Филатова**
Имя	**Анастасия**
Город	**Магнитогорск**
Школа	**МАОУ «Академический лицей»**
Класс	**10А**
Телефон/ эл.почта	**filatovaanastasya2003@mail.ru**
ФИО педагога	**Елисеева Ирина Владимировна**

Задача 1

Да, возможно, если сегодня 1 января. День рождения Мими 31 декабря.

Задача 2

x - количество людей (2 ноги)
y - количество кошек (4 ноги).
z - количество мух. (6 ног). , $x, y, z \in N$.

Составляем систему из 2ух уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2x+4y+6z=60 \end{cases}$$

Решая систему в целых положительных числах, получаем

$$\left[\begin{array}{l} x=1;\ y=4;\ z=7. \\ x=2;\ y=2;\ z=8 \\ x=1;\ y=1;\ z=9. \end{array}\right.$$

Ответ: 1 человек, 4 кошки, 7 мух;
2 человека, 2 кошки, 8 мух;
1 человек, 1 кошка, 9 мух;

Задача 4

$$\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \ldots + \cos 170^\circ + \cos 180^\circ =$$

$$= \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \ldots + \cos 80^\circ + \cos 90^\circ + \cos 100^\circ + \ldots + \cos 170^\circ + \cos 180^\circ =$$

$$= \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \ldots + \cos 80^\circ + \cos 90^\circ + \cos(180^\circ - 80^\circ) + \ldots + \cos(180^\circ - 10^\circ) + \cos 180^\circ =$$

$$= \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \ldots + \cos 80^\circ + \cos 90^\circ - \cos 80^\circ - \cos 70^\circ - \ldots - \cos 10^\circ + \cos 180^\circ =$$

$$= \cos 90^\circ + \cos 180^\circ = 0 + (-1) = 0 - 1 = -1$$

Задача 5

$$\sqrt{\frac{x+4}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} = \frac{5}{6}$$

$t = \frac{x+4}{x-1}$ - вводим замену

$\sqrt{t} - \sqrt{\frac{1}{t}} = \frac{5}{6}$, $\begin{cases} t \neq 0; \\ t \geq 0; \end{cases} \Rightarrow t > 0$

$\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{5}{6}$

$\sqrt{t}^{(6\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}^{(6} - \frac{5}{6}^{(\sqrt{t}} = 0$ (запишем все в одну дробь с общим знаменателем $6\sqrt{t}$)

$$\frac{6t - 6 - 5\sqrt{t}}{6\sqrt{t}} = 0.$$

$$\begin{cases} 6t - 6 - 5\sqrt{t} = 0, \\ 6\sqrt{t} \neq 0; \end{cases}$$

$6t - 5\sqrt{t} - 6 = 0.$

$\sqrt{t} = u$, $u > 0.$

$6u^2 - 5u - 6 = 0$

$D = 25 + 144 = 169.$

$u = \frac{5 \pm 13}{12} = \left[\begin{array}{l} u_1 = 1{,}5 \\ u_2 = -\frac{2}{3} \text{ - посторонний корень.} \end{array}\right.$

Вернемся к замене:

$u = 1{,}5.$

$u = \sqrt{t}.$ $\sqrt{t} = \frac{3}{2}$, возводим обе части в квадрат, т.к. $t > 0.$

$t = \frac{9}{4}$

Вернемся к замене

$$\frac{x+4}{x-1} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{x+4}{x-1}=\frac{9}{4}, \quad x\neq 1.$$

$$4(x+4)=9(x-1).$$

$$4x+16=9x-9.$$

$$5x=25$$

$$x=5.$$

Ответ: $x=5$.

Задача 7

$$\begin{cases} |x-3|-3=-2, \\ x+|y-4|=5; \end{cases}$$

1) Решим первое уравнение.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3\geq 0, \\ x-3-3=-2, \end{cases} \\ \begin{cases} x-3<0, \\ 3-x-3=-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 3, \\ x=4, \end{cases} \\ \begin{cases} x<3, \\ x=2. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$$

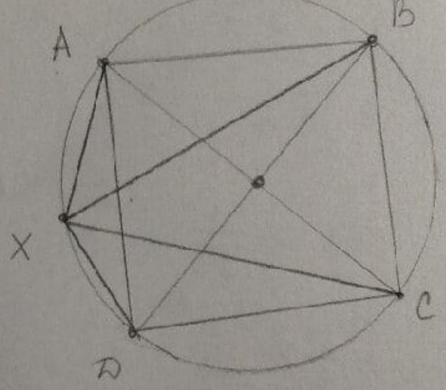
2) Подставляем полученные значение x во второе уравнение.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-4\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 4+y-4=5, \\ 2+y-4=5, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y-4<0, \\ \left[\begin{array}{l} 2-y+4=5, \\ 4-y+4=5. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\geq 4, \\ \left[\begin{array}{l} y=5, \\ y=7, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y<4, \\ \left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=3, \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x=4,\ y=5;$
$x=2,\ y=7;$
$x=2,\ y=1;$
$x=4,\ y=3;$

Задача 8



Дано:
ABCD - квадрат,
Окружность S описана около ABCD,
$X \in S$
Док-ть:
$$XA^2 - XB^2 = XD^2 - XC^2$$

Доказательство:

Центр окружности, описанной около квадрата - это точка пересечения его диагоналей, а сами диагонали являются диаметрами

Из $\triangle AXC$:

$\angle AXC = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр окружности.

$d^2 = AC^2 = AX^2 + XC^2$, d - диаметр окружности

Из $\triangle BXD$:

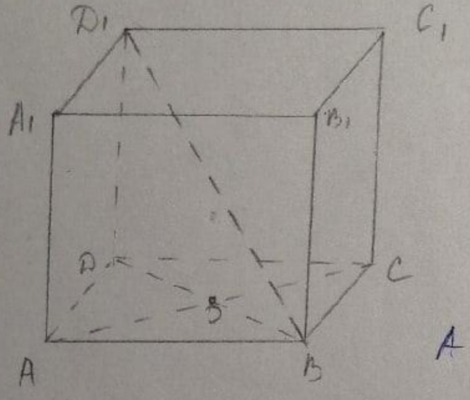
$\angle BXD = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр окружности.

$d^2 = BD^2 = XB^2 + XD^2$

$$AC^2 = BD^2$$
$$XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$$
$$XA^2 - XB^2 = XD^2 - XC^2$$

ч.т.д.

Задача 9



Ответ: A_1C_1, B_1C, AC, A_1D, AB_1, DC_1

Обоснование:

$ADCB$ – квадрат
DB и AC – диагонали $\Rightarrow DB \perp AC$.

$DD_1 \perp (ADC)$ (по определению куба)
D_1B – наклонная
DB – проекция
$DB \perp AC$
$AC \subset (ADC)$

по теореме о трех перпендикулярах $\Rightarrow D_1B \perp AC$.

Аналогично для каждого из остальных отрезков.

ч.т.д.