МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Многопрофильная олимпиада школьников «Путь к успеху»

МАТЕМАТИКА

Титульный лист работы

Шифр________

Фамилия	**Бернацкая**
Имя	**Дарья**
Город	**Владимировна**
Школа	**МАОУ «Академический лицей»**
Класс	**10 «А»**
Телефон/ эл.почта	**8-950-731-36-18 lexy4974@gmail.com**
ФИО педагога	**Елисеева Ирина Владимировна**

(1) Это возможно, если Миша произнес данные слова 1 января, а день рождения у него 31 декабря.

(2) люди – x

кошки – y

мухи – z

Всего 12 особей, количество ног – 60

$$\begin{cases} 2x+4y+6z=60 \\ x+y+z=12 \end{cases}$$

$x, y, z \in N$

Решая данную систему в натуральных числах можем получить следующие варианты решения:

1) 1 человек, 4 кошки, 7 мух;
2) 2 человека, 2 кошки, 8 мух
3) 1 человек, 1 кошка, 9 мух

(4) $\cos 10° + \cos 20° + \cos 30° + \cos 40° + \cos 50° + \cos 60° + \cos 70° + \cos 80° + \cos 90° + \cos 100° +$
$+ \cos 110° + \cos 120° + \cos 130° + \cos 140° + \cos 150° + \cos 160° + \cos 170° + \cos 180° =$
$= \cos 10° + \cos 20° + \cos 30° + \ldots + \cos 90° + \cos(180° - 80°) + \cos(180° - 70°) + \ldots$
$+ \cos(180° - 20°) + \cos(180° - 10°) + \cos 180° = \cancel{\cos} 10° + \cancel{\cos 20°} + \cancel{\cos 30°} + \ldots + \cos 90° -$
$- \cancel{\cos} 80° - \cancel{\cos} 70° - \ldots - \cancel{\cos 20°} - \cancel{\cos} 10° + \cos 180° = \cos 90° + \cos 180° = 0 - 1 = -1$

Ответ: -1

(5) $\sqrt{\frac{x+4}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} = \frac{5}{6}$

$t = \frac{x+4}{x-1}, \quad t > 0$

$\sqrt{t} - \sqrt{\frac{1}{t}} = \frac{5}{6}$

$\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{5}{6} = 0$

$\frac{6\sqrt{t}\cdot\sqrt{t} - 6 - 5\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 0$

$\frac{6t - 6 - 5\sqrt{t}}{6\sqrt{t}} = 0$

$\sqrt{t} = u, \quad u > 0$

$$\frac{6u^2-6-5u}{6u}=0$$

$$6u^2-5u-6=0$$

$$D=25+144=169$$

$$u_{1,2}=\frac{5\pm13}{12}=\left[\begin{array}{l} u_1=\frac{3}{2} \\ u_2=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$$ - посторонний корень

$$\sqrt{t}=\frac{3}{2}$$

$$(\sqrt{t})^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$t=\frac{9}{4}$$

$$\frac{x+4}{x-1}=\frac{9}{4}$$

$$\frac{x+4}{x-1}-\frac{9}{4}=0$$

$$\frac{4x+16-9x+9}{4(x-1)}=0$$

$$\frac{25-5x}{4(x-1)}=0$$

$$\begin{cases} 5x=25 \\ x\neq1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=5 \\ x\neq1 \end{cases}$$

Ответ: $x=5$

7

$$\begin{cases} |x-3|-3=-2 \\ x+|y-4|=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-3|=1 \\ x+|y-4|=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{array}\right. \\ x+|y-4|=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right. \\ x+|y-4|=5 \end{cases}$$

При $x=4$:

$$4+|y-4|=5$$

$$|y-4|=1$$

Продолжение 7 задания

$\left[\begin{array}{l} y-4=1 \\ y-4=-1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=3 \end{array}\right.$

При $x=2$

$2+|y-4|=5$

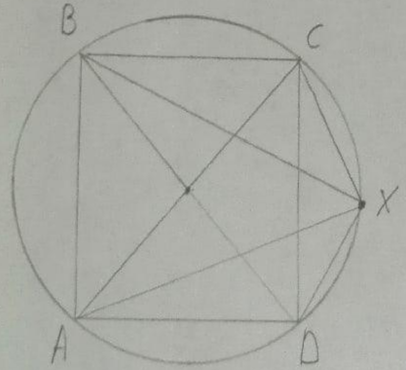
$|y-4|=3$

$\left[\begin{array}{l} y-4=3 \\ y-4=-3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y=7 \\ y=1 \end{array}\right.$

Ответ: $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$; $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$; $\begin{cases} x=7 \\ y=1 \end{cases}$

8



Дано:

S - окружность

ABCD - квадрат

X - любая точка

Доказать:

$XA^2 - XB^2 = XD^2 - XC^2$

Доказательство:

$\angle A = 90^\circ \Rightarrow BD$ - диаметр

$\angle D = 90^\circ \Rightarrow AC$ - диаметр

$AC = BD$ (как диагонали квадрата)

Из $\triangle XCA$:

CA - диаметр $\Rightarrow \angle CXA = 90^\circ$

По Th Пифагора

$AC^2 = XC^2 + XA^2$

Из $\triangle XBD$:

DB - диаметр $\Rightarrow BXD = 90^\circ$

По Th Пифагора

$BD^2 = XB^2 + XD^2$

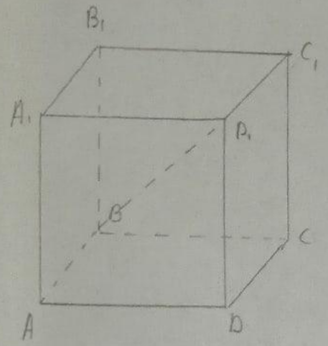
$AC^2 = BD^2$

$XC^2 + XA^2 = XB^2 + XD^2$

$XA^2 - XB^2 = XD^2 - XC^2$

ч.т.д.

8



A_1D, DC_1, B_1C, B_1A, A_1C_1, AC

Обоснование:

$ABCD$ - квадрат

$AC \perp BD$ (диаг. квадрата)

BD_1 - наклонная

$DD_1 \perp (ABC)$

BD - проекция

$\xRightarrow{3\perp} \underline{\underline{BD \perp BD_1}}$

Аналогично поступаем и со всеми остальными прямыми.