

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «МГТУ им. Г.И. Носова»

Многопрофильная олимпиада школьников «Путь к успеху»

МАТЕМАТИКА

Титульный лист работы

Шифр \_\_\_\_\_

Фамилия КОЖЕВНИКОВ

Имя МАТВЕЙ

Город МАГНИТОГОРСК

Школа МАОУ «МЛК1» г. МАГНИТОГОРСКА.

Класс 10

Телефон/  
эл.почта +798231-21-975.

ФИО педагога Никулина Людмила Николаевна

№1.  
 Да, возможно. Например, если Миша родился 31 декабря, тогда 1 января он может говорить то, что сказал своему другу, ведь позавчера (30 декабря) ему было 16 лет, 31 декабря ему исполнилось 16 лет, в нынешний год ему исполнится 17 лет, а в следующем 18.

Ответ: да, возможно; 31 декабря.

№2.  
 Пусть  $x$  - количество людей в комнате,  $y$  - количество кошек, а  $z$  - количество мух в комнате. По условию заданы всего в комнате 12 осей и 60 ног.

Составим 4 разных системы уравнений и попробуем её решить:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 60 \\ x + 2y + 3z = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x + 2y + 3z) = 60 \\ x + 2y + 3z = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 30 \\ x + 2y + 3z = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 30 \\ x + 2y + 3z = 30 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 30 \\ x + 2y + 3z = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 30 \\ x = 12 - 2y - 3z \end{cases}$$

Перепишем 1 уравнение и подставим в него 2:

$$x + 2y + 3z = 30$$

$$12 - 2y - 3z + 2y + 3z = 30$$

$$4 + 2z = 18$$

(т.к. всего осей 12 и каждой не менее 1  $\Rightarrow$  максимальная сумма  $y$  и  $z = 11$ , кто-то может подобрать наизусть числа, которые будут удовлетворять условию, а затем проверить их, подставив в нашу систему)

Примеры таких чисел

1)  $y = 2; z = 8$

2)  $y = 4; z = 7$

после проверки в одной системе мы поняли, что нам подходит только 2 вариант  $\Rightarrow$  людей было  $12 - 4 - 7 = 1$ ; мух было 7; кошек было 4.

Ответ: 1 человек; 4 кошки; 7 мух.

# Программы

$$\sqrt{\frac{x+4}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} = \frac{5}{6} \quad \text{N5.}$$

Пусть  $t = \frac{x+4}{x-1}$ ,  $t \geq 0$ , т.к.  $\sqrt{a} \geq 0$ , тогда:

$$\sqrt{t} - \sqrt{\frac{1}{t}} = \frac{5}{6}$$

$$\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{5}{6} = 0 \quad | \cdot \sqrt{t}$$

$$t - \frac{5}{6}\sqrt{t} - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = \frac{25}{36} + 4 = \frac{169}{36}, D > 0, 2 \text{ корня}$$

$$\sqrt{t} = \frac{3}{2} \quad | \Rightarrow t = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \text{ — удовлетворяет условию}$$

$$\sqrt{t} = -\frac{2}{3}, \text{ не удовлетворяет условию } \sqrt{a} \geq 0, \text{ брать не можем.}$$

Обратная замена:

$$\frac{x+4}{x-1} = \frac{9}{4}$$

$$4(x+4) = 9(x-1)$$

$$4x + 16 = 9x - 9$$

$$5x = 25$$

$$x = 5$$

Ответ: 5.

N7

$$\begin{cases} |x-3| - 3 = -2 \\ |x+1| - 4 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-3| - 3 = -2 \\ |x+1| - 4 = 5 \end{cases}$$

$$1) |x-3| - 3 = -2$$

$$|x-3| - 3 = -2$$

$$|x-3| = 1$$

$$x-3 = 1$$

$$x-3 = -1$$

$$x = 4$$

$$x = 2$$

$$2) |x+1| - 4 = 5$$

$$|x+1| - 4 = 5$$

$$|x+1| = 9$$

$$x+1 = 9$$

$$x+1 = -9$$

$$x = 8$$

$$x = -10$$

$$\begin{cases} (4; 2) \\ (2; 3) \\ (2; 1) \end{cases}$$

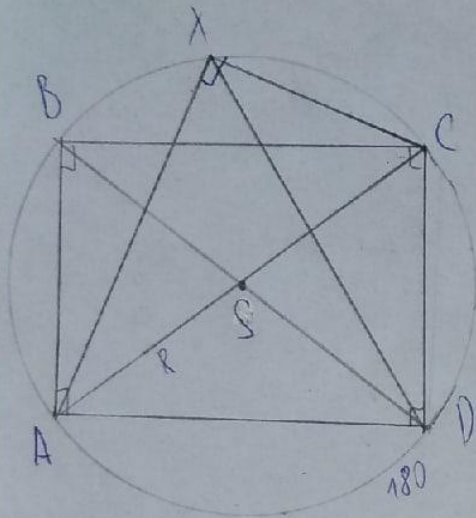
После постановки в исходную систему  
всего получилось четыре  $\Rightarrow$  эти  
уравнения имеют четыре решения.

Подставим эти значения в 2 уравнение:

$$\begin{cases} 4+4-4=5 \\ 2+4-4=5 \\ 2+1-4=5 \\ 2+1-4=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5 \\ y=3 \\ y=3 \\ y=1 \end{cases}$$



Отвеч:  $(4;5); (4;3); (2;7); (2;1)$ .



н.с.

Дано:

окл.  $(S; R)$

$ABCD$  - квадрат

Доказать:

$$XA^2 - XB^2 = XD^2 - XC^2$$

Доказательство:

Для решения данной задачи будем применять свойства вписанного  $\angle$  в окружность, Теорему Пифагора и свойства диагоналей квадрата.

1)  $\triangle AXC$  - прямоугольный (т.к.  $\angle AXC$  - вписанный и опирается на дугу  $AC = 180^\circ \Rightarrow \angle AXC = 180^\circ : 2 = 90^\circ$ )  
 $\Rightarrow AX^2 + XC^2 = AC^2 = D^2$  ( $D$  - диаметр окл.  $(S; R)$ )

2) Для  $\triangle BXD$  - прямоугольный:

Решаем аналогично  $\triangle AXC$  и получаем

$$BX^2 + XD^2 = D^2$$

3) Из 1 и 2 следует, что  $AX^2 + XC^2 + BX^2 + XD^2 = 2D^2$  (сумма 1 и 2) и этот вывод будет верен для любой точки окружности и равенства будет выполняться.

$$\cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 170^\circ + \cos 180^\circ$$

Решим заданную формулу приведения:

$$\cos 10^\circ = \cos(\pi - 170^\circ) = \cos(180^\circ - 170^\circ) = -\cos 170^\circ$$

$$\cos 20^\circ = \cos(\pi - 160^\circ) = \cos(180^\circ - 160^\circ) = -\cos 160^\circ \text{ и т.д.}$$

Получим:

$$-\cos 170^\circ - \cos 160^\circ - \cos 150^\circ - \dots + \cos 90^\circ + \dots + \cos 150^\circ + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ + \cos 180^\circ$$

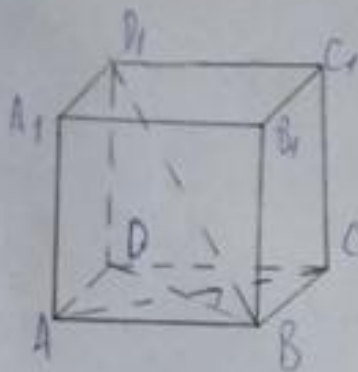
Сократим противоположные величины и получим:

$$\cos 90^\circ + \cos 180^\circ = 0 - 1 = -1.$$

Отвеч:  $-1$ .

Прозрачный.

№9.



Дано  
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  - куб.  
 Дано:  $B_1 D_1 \perp AC$ .

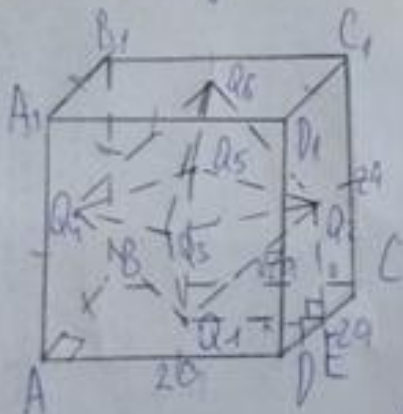
Решение:

- 1) В  $ABCD$  - квадрате:  
 $AC \perp BD$  (св-во диагоналей квадрата)
  - 2)  $B_1 D_1$  - наклонная к  $(ABC)$   
 $B_1 D_1 \perp (ABC)$  (т.к. куб)  
 $BD$  - проекция (наклонной  $B_1 D_1$ ) к  $(ABC)$
- $\Rightarrow$  по теореме о 3 перпендикулярах  
 $B_1 D_1 \perp AC$

Аналогично можно решить для диагоналей граней куба, которые не пересекаются с ней. ~~наскрещиваются.~~  
 Ответ:  $AC; A_1 C_1; AB_1; D_1 C_1; DA_1; CB_1$ .

№10.

Чтобы упростить расчеты возьмем правильным прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$



Дано  
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  - параллелепипед с равными ребрами  
 равными  $2a$

$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  - центры граней

$Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 Q_6$  - октаэдр.

Решение: Найти  $S_{окт}$  и  $V_{окт}$ .

1) т.к. наш параллелепипед - куб = все грани равны  $\Rightarrow$

$S_{окт} = 6 S_{ABCD} = 6 \cdot 2a \cdot 2a = 24a^2$

2)  $B_1 D_1 E Q_2 - 2E = 90^\circ$  (т.к. куб)  
 $D_1 E = EQ_2 = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} A_1 D_1 = a$  т.к.  $Q_1$  и  $Q_2$  - середины  
 граней, а  $Q_1 D_1 \perp Q_2 E \parallel AD \perp B_1 D_1$



1) По теореме Пифагора:

$$Q_1 Q_2 = Q_1 E + Q_2 E^2$$

$$Q_1 Q_2 = \sqrt{2} a$$

3) Пл. к. куб - это правильный параллелепипед  $\Rightarrow$  в него вписан правильный октаэдр  $\Rightarrow$  все его грани равны  $\Rightarrow$  Сомн. бок. пов.  $2Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 Q_5 Q_6 = 8 Q_1 Q_2 Q_3$

4)  $\Delta Q_1 Q_2 Q_3$  - правильный  $\Rightarrow S_{Q_1 Q_2 Q_3} = \frac{\sqrt{3} a^2}{4} = \frac{\sqrt{3} (\sqrt{2} a)^2}{4} = \frac{2\sqrt{3} a^2}{4} = \frac{\sqrt{3} a^2}{2}$

5)  $\frac{S_{\text{сомн. бок. пов. ABCDA'B'C'D'}}}{S_{\text{пл. бок. пов.}}} = \frac{24 a^2 \cdot 2}{\sqrt{3} a^2} = \frac{48}{\sqrt{3}} = \frac{16 \cdot 3 \sqrt{3}}{3} = 16 \sqrt{3}$

Ответ:  $16\sqrt{3}$ .



№3.

Найдём вероятности различных событий:  $VCC = \frac{\text{благо}}{\text{все}}$

1)  $\frac{12}{30} = 0,4$  - день будет ласный (случайный)

2)  $\frac{18}{30} = 0,6$  - день будет пасмурным

3)  $0,4 \times 0,3 = 0,12$  - вероятность того, что случайный день будет с дождем и ласным

4)  $0,6 \times 0,8 = 0,48$  - вероятность того, что случайный день будет пасмурным и с дождём

Иванов может промокнуть тогда, когда идёт дождь и он не взял или взял не исправный (пламанный) зонтик. Поэтому найдём вероятность, что Иванов промокнет в случайный день, а затем из 1 вычтем её, чтобы найти вероятность того, что он не промокнет.

5)  $\frac{1}{2}$  - вероятность того, что зонтик будет не исправным

6)  $0,12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,3 = 0,018$  - вероятность того, что Иванов промокнет в ласную погоду с зонтом (пламанным) (случайный день)

7)  $0,12 \cdot 0,7 = 0,084$  - вероятность того, что Иванов промокнет в ласную погоду, забыв зонтик (случайный день)

8)  $0,018 + 0,084 = 0,102$  - вероятность того, что в случайный ласный день Иванов промокнет

9)  $0,48 \cdot \frac{1}{2} = 0,24$  - вероятности того, что Иванов промокнет в случайный пасмурный день из-за пламанного зонтика.

10)  $0,102 + 0,24 = 0,342$  - вероятность того, что в случайный день Иванов промокнет  $\Rightarrow 1 - 0,342 = 0,658$  - вероятность того, что в случайный день он не промокнет <sup>на</sup>подозреваю. Дие. <sup>на</sup>вопрос и интересуют тот вариант, когда дождь и ласный будет, поэтому мы должны исключить то, что в случайный день дождя не будет.

11)  $0,658 - (0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,2) = 0,258$  - вероятность того, что Иванов в случайный день не промок, но дождь был

12)  $0,258 \times 0,48 = 0,12384$  - вероятность того, что в случ. день было пасмурно с дождем и Иванов не промок.

Ответ: 1) 0,658; 2) 0,12384